Esercizio (percorso automobilistico) *Consideriamo un percorso automobilistico circolare per percorrere il quale occorrono esattamente 100 litri di benzina. Lungo il percorso sono state disposte, in modo casuale, alcune taniche di benzina che in totale contengono 100 litri. Dimostrare che esiste un punto del percorso a partire dal quale, a serbatoio inizialmente vuoto, si riesce a completare il giro.*

Soluzione:
Dimostriamo, per induzione su n="numero della taniche di benzina", il seguente predicato:

P(n):= per ogni disrtibuzione dei 100 litri di benzina in n taniche e per ogni loro dislocazione lungo il percorso, esiste un punto di partenza dal quale riesco a completare il giro in senso orario.

$P(1)$ è ovvio.
Supponiamo che $P(n)$ sia vera e dimostriamo che $P(n+1)$ è vera.
Consideriamo quindi una configurazione Γ in cui la benzina è distribuita in $n+1$ taniche di contenuto rispettivamente $t_1, \dots, t_{n+1}$ (con $t_1 + \cdots + t_{n+1} = 100$), che sono dislocate lungo il circuito rispettivamente in $n+1$ punti che posso nominare, procedendo in senso orario, $A_1, \dots, A_{n+1}$.

- Per il principio dei cassetti esiste un punto a partire dal quale, in verso orario, riesco a raggiungere il punto successivo. A meno di rinominare i punti, posso supporre che questo punto sia A_n, e quindi so che da A_n la benzina t_n è sufficiente a farmi raggiungere A_{n+1}.
- Verso la benzina contenuta nella tanica che si trova in A_{n+1} nella tanica che si trova in A_n.

Ho ottenuto così una configurazione, che chiamerò Λ, con n taniche nei punti $A_1, \dots, A_n$ e so che in A_i ci sono t_i litri di benzina per $1 \leq i < n$ e in A_n ce ne sono $t_n + t_{n+1}$.

- Per ipotesi induttiva esiste un punto A_k ($1 \leq k \leq n$) partendo dal quale si riesce a completare il giro in senso orario.

Lo stesso punto di partenza mi permette di percorrere in senso orario anche il circuito di configurazione Γ dal quale eravamo partiti. Infatti, Γ e Λ differiscono solo nel tratto tra A_n e A_1, quindi parto da A_k e arrivo in A_n perché questa parte del percorso è identica alla parte corrispondente in Λ (se per caso fosse $k = n$, niente di male!). In A_n questa volta prendo solo la benzina t_n, ma so che è sufficiente ad arrivare in A_{n+1} e qui prendo la benzina t_{n+1}. A questo punto sono di nuovo nella stessa situazione in cui ero nel caso della configurazione Λ, quindi posso concludere il giro.

Osservazione:
Da quanto dimostrato segue che, ovviamente, tutti i giri si possono percorrere anche in senso antiorario. Infatti, una certa configurazione Γ è percorribile in senso antiorario in quanto una sua simmetrica Γ', ottenuta da Γ con una simmetria rispetto ad un asse del cerchio, si poteva percorrere in senso orario.